

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ С УГЛОВОЙ КРОМКОЙ

Д. Н. Горелов, Ю. С. Смолин

*Институт информационных технологий и
прикладной математики СО РАН, Омск
gorelov@iitam.omsk.net.ru*

Исследование нестационарного течения около профиля с угловой кромкой представляет большой теоретический интерес. Это обусловлено рядом причин. Главная из них – существенная нелинейность граничных условий в угловой кромке, что делает принципиально невозможной линеаризацию задачи даже при малых возмущениях потока. Другая причина – отсутствие алгоритмов, позволяющих достоверно вычислять локальные характеристики течения в угловой кромке. И, наконец, возникают сомнения относительно соответствия общепринятой теоретической модели физической картине нестационарного течения около профиля с угловой кромкой.

Предварительный анализ показал, что корректное решение задачи в рамках известных алгоритмов невозможно. Поэтому был разработан новый алгоритм решения нелинейной начально-краевой задачи нестационарного обтекания профиля с угловой кромкой, который позволил с высокой точностью определять характеристики течения вблизи кромки на всех стадиях развития вихревого следа. Алгоритм включает в себя сведение краевой задачи к системе интегральных уравнений, составленной из уравнений 1 и 2 рода, решение этой системы методом панелей, моделирование элемента вихревого слоя, сходящего с профиля за время Δt , распределенным вихревым слоем, строгий учет граничных условий в угловой кромке с применением сплайна специального вида и решение методом итераций системы нелинейных алгебраических уравнений, к которой сводится задача на каждом шаге по времени.

Постановка задачи. Рассмотрим в декартовой системе координат Oxy задачу о произвольном движении профиля с угловой задней кромкой в безграничном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Пусть с момента времени $t = 0$ контур профиля $L(t)$

начал двигаться со скоростью $\vec{U}(x, y, t)$, $(x, y) \in L(t)$. В общем случае его движения циркуляция скорости $\Gamma(t)$ вокруг профиля меняется с течением времени, что порождает вихревой след – линию контактного разрыва $L_w(t)$ (рис. 1). Движение жидкости вне профиля и вихревого следа предполагаем потенциальным.

В качестве искомой функции выбираем комплексную скорость $\bar{v}(z, t)$, которая является аналитической функцией в области течения жидкости. Ищем ее в виде

$$\bar{v}(z, t) = \bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(s, t) ds}{z - \zeta(s, t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_w} \frac{\gamma_w(\sigma, t) d\sigma}{z - z_w(\sigma, t)}, \quad (1)$$

где \bar{v}_∞ – скорость жидкости в бесконечно удаленной точке, $\zeta(s, t) \in L(t)$, $z_w(\sigma, t) \in L_w(t)$, $\gamma(s, t)$, $\gamma_w(\sigma, t)$ – интенсивности вихревых слоев, моделирующих профиль и вихревой след, s, σ – дуговые координаты точек $\zeta(s, t)$, $z_w(\sigma, t)$.

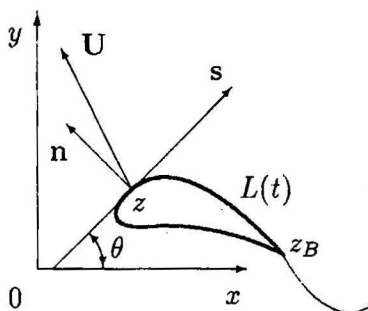


Рис. 1

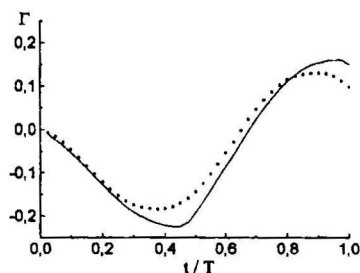


Рис. 2

Функция $\bar{v}(z, t)$ должна удовлетворять граничным условиям непротекания жидкости через контур $L(t)$, затухания возмущенных скоростей в бесконечно удаленной точке, непрерывности давления и нормальной составляющей скорости жидкости при переходе через вихревой след $L_w(t)$.

Для выполнения условий на $L_w(t)$ достаточно потребовать, чтобы вихревой слой на $L_w(t)$ был свободным и перемещался вместе с жидкостью. Это имеет место, если комплексная координата $z_w(\sigma, t)$ частицы жидкости, сошедшей с задней кромки профиля (точки z_B) в некоторый момент времени t_0 ($0 \leq t_0 < t$),

определяется решением задачи Коши нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \bar{z}_w}{\partial t} = \bar{v}(z_w, t), \quad \bar{z}_w(0, t_0) = \bar{z}_B(t_0). \quad (2)$$

Интенсивность сходящихся вихрей $\gamma_B(t)$ для любого момента времени связана с циркуляцией скорости вокруг профиля $\Gamma(t)$ равенством

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\gamma_B w_B, \quad \gamma_B = \gamma_w(0, t), \quad (3)$$

где $w_B(t)$ – скорость схода свободных вихрей с задней кромки.

Сход вихрей может происходить только по касательной к одной из сторон профиля. При этом для профиля с угловой задней кромкой ($\delta \neq 0$) другая сторона профиля не может гладко стыковаться с вихревым следом, образуя угловую точку, в которой относительная скорость жидкости должна быть равна нулю. С учетом перехода угловой точки с верхней стороны профиля на нижнюю в зависимости от знака $d\Gamma/dt$ это условие принимает вид

$$\gamma_B^{(1)} = 0 \text{ при } d\Gamma/dt < 0, \quad \gamma_B^{(2)} = 0 \text{ при } d\Gamma/dt > 0. \quad (4)$$

Здесь $\gamma_B^{(1)}, \gamma_B^{(2)}$ – предельные значения интенсивности вихревых слоев на контурах L_1, L_2 при подходе к задней кромке z_B . В результате скорость схода вихрей становится равной $w_B = |\gamma_B|/2$ и соотношение (3) принимает вид

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\gamma_B \frac{|\gamma_B|}{2}. \quad (5)$$

Изложенная постановка задачи известна. При этом в работах, посвященных решению задач нестационарного обтекания профиля с угловой кромкой, обычно используется соотношение (5), а не условие (4), на основании которого оно получено (см., напр., [1, 2]).

Метод решения. Для решения рассматриваемой нелинейной начально-краевой задачи применяется известная процедура дискретизации по времени, позволяющая для ряда последовательных значений времени t_1, \dots, t_n формулировать краевые задачи с известными контурами $L(t_m), L_w(t_m), m = 1, \dots, n$. Эти краевые за-

дачи, следуя работе [3], сводим к системе сингулярных интегральных уравнений 1 и 2 рода относительно функций γ_1, γ_2 :

$$\text{Im}\{e^{i\theta(s_1,t)}[\bar{v}(z_1,t) - \bar{U}(z_1,t)] - e^{i\theta(s_2,t)}[\bar{v}(z_2,t) - \bar{U}(z_2,t)]\} = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\gamma_1(s_1,t) - \gamma_2(s_2,t)] + \text{Re}\{e^{i\theta(s_1,t)}[\bar{v}(z_1,t) - \bar{U}(z_1,t)] - \\ - e^{i\theta(s_2,t)}[\bar{v}(z_2,t) - \bar{U}(z_2,t)]\} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь z_1, z_2 — соседние точки на верхней L_1 и нижней L_2 сторонах контура L соответственно; s_1, s_2 — дуговые координаты точек z_1, z_2 ; γ_1, γ_2 — интенсивности вихревых слоев на контурах L_1, L_2 ,

$$\begin{aligned} \bar{v}(z_r,t) = \bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\gamma_1(s,t) ds}{z_r - \zeta_1(s,t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\gamma_2(s,t) ds}{z_r - \zeta_2(s,t)} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_w} \frac{\gamma_w(\sigma,t) d\sigma}{z - z_w(\sigma,t)}, \quad r = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Система интегральных уравнений (6), (7) решалась методом панелей с линейным распределением интенсивности вихревого слоя по каждому элементу контура L . Что касается вихревого следа L_w , то его элемент, примыкающий к задней кромке и образованный вихрями, сошедшими с профиля за время $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$, также моделировался панелью с линейным распределением вихрей. Другие же элементы следа, образованные вихрями, сошедшими с профиля за предыдущие промежутки времени, заменялись системой свободных дискретных вихрей. В результате для каждого момента времени t_n интегральные уравнения (6), (7) и соотношения (2)–(5) сводятся к нелинейной системе алгебраических уравнений относительно значений интенсивностей вихревых слоев на стыках панелей, которая решалась методом итераций.

Было разработано два варианта алгоритма. В первом, основном варианте, граничное условие в задней кромке выбиралось в форме (4), а во втором — в форме (5). Следует отметить, что условие (4), в отличие от условия (5), удалось выполнить только путем замены линейного сплайна для интенсивности вихревого слоя $\gamma(\sigma)$ на панелях, примыкающих к задней кромке (точке z_B), на квадратичный сплайн специального вида.

Результаты расчета. Основными локальными характеристиками течения вблизи кромки являются касательные составляющие скорости жидкости на контуре (они равны с обратным знаком величинам $\gamma_B^{(1)}$, $\gamma_B^{(2)}$), интенсивность сходящих вихрей $\gamma_B = \gamma_B^{(1)} + \gamma_B^{(2)}$ и скорость их схода $w_B = (\gamma_B^{(2)} - \gamma_B^{(1)})/2$. Циркуляция скорости Γ является интегральной характеристикой.

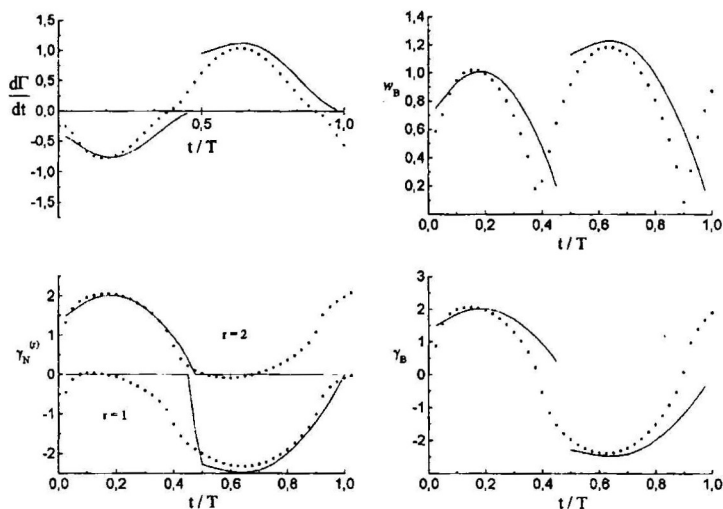


Рис. 3

Результаты расчета зависимости безразмерных характеристик Γ , $\gamma_B^{(1)}$, $\gamma_B^{(2)}$, γ_B , w_B и $d\Gamma/dt$ от времени приведены на рис. 2, 3 (сплошная линия соответствует первому варианту алгоритма, а точки – второму). Расчет проведен для симметричного профиля Кармана-Трефца, угловая кромка которого имеет угол $\delta = 0,1$, а относительная толщина составляет 15%. Профиль совершает поступательные колебания по гармоническому закону с круговой частотой ω и амплитудой $0,0183b$ от начального момента времени $t = 0$ до $t = T$, где b – хорда профиля, T – период колебаний. Число Струхала $\omega b/|v_\infty| = 17$. Расчет при таких значениях параметров проводится многими авторами. Применение в алгоритме новых технологических элементов и тщательный контроль точ-

ности расчетов позволяет рекомендовать результаты на рис. 2, 3 в качестве тестовых.

Приведенные результаты показывают, что расчет по первому варианту алгоритма дает строгое выполнение условия равенства нулю относительной скорости жидкости (величин $\gamma_B^{(1)}, \gamma_B^{(2)}$) в угловых точках на линиях тока. Однако это условие не выполняется при замене граничного условия (4) на (5). Иначе говоря, из условия (4) следует условие (5), а обратное утверждение не имеет места. Это следует учитывать при формулировке начально-краевой задачи нестационарного обтекания профиля с угловой кромкой.

Другая особенность построенных решений – различный характер их поведения при переходе моментов времени, при которых происходит смена знака у производной от циркуляции скорости. В основном решении, удовлетворяющем условию (4), имеет место разрыв всех локальных характеристик течения и производной от циркуляции скорости, а решение с условием (5) сохраняет непрерывность. Такое поведение основного решения не согласуется с физической картиной течения, тогда как решение с условием (5) соответствует как физическим представлениям, так и результатам расчета по другим известным алгоритмам. Отсюда следует вывод о необходимости корректировки математической модели нестационарного течения около профиля с угловой кромкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Giesing J.P. *Nonlinear two-dimensional unsteady potential flow with lift* // J. Aircraft. – 1968. – V. 5. – N 2. – P. 135–143.
2. Сарпкаяя Т. *Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988)* // Соврем. машиностроение. Серия А. – 1989. – N 10. – С. 1–60.
3. Горелов Д.Н. *Об интегральных уравнениях задачи обтекания профиля* // Изв. РАН. МЖГ. – 1992. – N 2. – С. 173–177.